

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE**  
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

---

**I Parziale - Compito A**

**30/03/2006**

**A.A. 2005 – 2006**

**1) Date le matrici:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

*eseguire, ove possibile, le seguenti operazioni:*

a)  $A+B$ ; b)  $A+C$ ; c)  $B \times C$ ; d)  $A \times C$ ; e)  $B \times A$ ; f)  $C-A$ ; g)  $2 \times A$

Osserviamo, in primo luogo, che:

- $A$  è una matrice di ordine  $3 \times 2$
- $B$  è una matrice di ordine  $3 \times 3$
- $C$  è una matrice di ordine  $3 \times 2$

Ne segue, pertanto, che:

a)  $A+B$  non è possibile perché le due matrici hanno ordine diverso

b)  $A+C$  è possibile perché le due matrici hanno stesso ordine

$$A + C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 3-2 \\ -2+1 & -2+3 \\ -3+0 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

c)  $B \times C$  è possibile perché il numero delle colonne di  $B$  è uguale al numero delle righe di  $C$

$$B \times C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \\ 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2-6 \\ -1 & -2+9 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B \times C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

d)  $A \times C$  non è possibile perché il numero delle colonne di  $A$  è diverso dal numero delle righe di  $C$

**Prof.ssa Daniela Tondini**

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE**  
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

---

**I Parziale - Compito A**

**30/03/2006**

**A.A. 2005 – 2006**

e)  $B \times A$  è possibile perché il numero delle colonne di  $B$  è uguale al numero delle righe di  $A$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-3) & (-1) \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) & 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) & 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1+6 & -3-2 \\ 1-9 & 3+3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -8 & 6 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -8 & 6 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

f)  $C - A$  è possibile perché le due matrici hanno stesso ordine

$$C - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 & -2-3 \\ 1-(-2) & 3-(-2) \\ 0-(-3) & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C - A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

g)  $2 \times A$  è possibile perché è sempre possibile moltiplicare una matrice per un numero qualsiasi

$$2 \times A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 \times A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Utilizzando il Teorema degli Orlati, calcolare il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ -5 & 10 & 5 & 20 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Iniziamo con l'osservare che la matrice  $A$  è quadrata di ordine  $m \times n = 4 \times 4$ , per cui risulta:

$$0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\} = \min\{4, 4\} = 4$$

**Prof.ssa Daniela Tondini**

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE**  
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

---

**I Parziale - Compito A**  
**30/03/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

Poiché, inoltre, la matrice  $A$  non è la matrice nulla segue che  $r(A) \neq 0$ . Dunque:

$$0 < r(A) \leq 4$$

Consideriamo ora un minore del secondo ordine diverso da zero. Sia esso, ad esempio:

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) \geq 2$$

Calcoliamoci ora i minori orlati di  $M_1$ , del terzo ordine, osservando che se essi sono tutti nulli allora è  $r(A) = 2$ , mentre se ne esiste almeno uno non nullo è  $r(A) \geq 3$ . Otteniamo, allora:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 10 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 20 + 0 + 5 + 20 - 0 = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ -5 & 10 & 20 \end{vmatrix} = -20 - 70 + 0 + 20 + 70 - 0 = 0;$$
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 0 - 1 - 2 - 0 = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 14 + 0 - 4 - 7 - 0 = 0$$

Poiché abbiamo trovato che tutti i minori orlati di  $M_1$  del terzo ordine sono uguali a zero possiamo affermare che:

$$r(A) = 2$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) *Calcolare il suo determinante*

Essendo  $A$  una matrice quadrata di ordine 4, risulta possibile calcolare il suo determinante utilizzando il metodo di Laplace, sviluppandolo rispetto alla seconda o alla terza riga (è più conveniente scegliere tali righe in quanto in esse vi è un elemento nullo, a differenza delle altre righe!!!).

Scegliamo, ad esempio, la seconda riga. Per la regola dei segni otteniamo:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{+}{1} & \overset{-}{-2} & \overset{+}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

**Prof.ssa Daniela Tondini**

**I Parziale - Compito A**  
**30/03/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

Calcoliamo ora il determinante di A:

$$\begin{aligned} \det A &= -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -0 \cdot [5 - 0 - 8 - (4 + 0 + 10)] + 1 \cdot [5 - 0 + 16 - (12 + 0 - 20)] + \\ &- 1 \cdot [-5 + 0 + 8 - (-12 + 0 + 10)] + 3 \cdot [-2 + 3 - 4 - (6 + 1 + 4)] = \\ &= 0 \cdot (-3 - 14) + 1 \cdot (21 + 8) - 1 \cdot (3 + 2) + 3 \cdot (-3 - 11) = 0 \cdot (-17) + 1 \cdot (29) - 1 \cdot (5) + 3 \cdot (-14) = \\ &= 0 + 29 - 5 - 42 = -18 \end{aligned}$$

Dunque:

$$\det A = -18$$

b) Dire se è ridotta ed in caso contrario ridurla attraverso le operazioni elementari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che una matrice ridotta (per righe) è una matrice tale che in ogni riga risulta possibile trovare un elemento speciale, non nullo, al di sotto del quale tutti gli altri elementi della matrice stessa sono nulli.

In virtù di tale definizione risulta facile convincersi che la matrice data non è ridotta.

Cerchiamo, pertanto, di ridurla sfruttando le operazioni elementari sulle righe, o sulle colonne, di A:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 8 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -7 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque la matrice ridotta sarà

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

**Prof.ssa Daniela Tondini**

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE**  
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

---

**I Parziale - Compito A**  
**30/03/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

dove:

$$a_{11} = 1; \quad a_{22} = 1; \quad a_{34} = 1$$

sono gli elementi speciali rispettivamente della prima, della seconda e della terza riga della matrice.

4) Calcolare, se esiste, l'inversa della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Iniziamo con il vedere se esiste o meno la matrice inversa di  $A$  calcolando il suo determinante. Risulta pertanto:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 2 + 1 = 7 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}, \text{ inversa di } A$$

Dunque:

$$\det A = 7$$

Primo metodo

Calcoliamo l'inversa di  $A$  utilizzando il metodo dei complementi algebrici, ovvero la relazione:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

Dobbiamo quindi scrivere, in primo luogo, la matrice dei complementi algebrici  $A^*$ . Risulta:

$$\begin{aligned} c_{11} &= + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9; & c_{12} &= - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8; & c_{13} &= + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \\ c_{21} &= - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1; & c_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4; & c_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \\ c_{31} &= + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2; & c_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1; & c_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned}$$

da cui segue:

$$A^* = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Prof.ssa Daniela Tondini**

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE**  
 CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

**I Parziale - Compito A**  
**30/03/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

Pertanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Secondo metodo

Affianchiamo alla matrice  $A$ , di ordine  $3 \times 3$ , la matrice identità dello stesso ordine:

$$[A | I_3] = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_A \mid \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \right)$$

Effettuiamo ora le operazioni elementari sulle righe, o sulle colonne, di  $[A | I_3]$  in modo tale da ottenere, alla fine, una matrice della forma  $[I_3 | B]$ , dove la matrice  $B$  sarà proprio l'inversa,  $A^{-1}$ , di  $A$ :

$$\begin{aligned} [A | I_3] &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3 - R_2} \\ &\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow 7R_2 - R_3} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -16 & 8 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow 7R_1 + R_3} \end{aligned}$$

**Prof.ssa Daniela Tondini**

**I Parziale - Compito A**  
**30/03/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & 14 & 0 & -16 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow \frac{1}{7}R_1 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{14}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{7}R_3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{I_3} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{A^{-1}}$

Dunque risulta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

5) Dati i seguenti vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 1), \quad \underline{v}_2 = (2, 0, 2), \quad \underline{v}_3 = (1, 1, 1)$$

verificare se sono linearmente indipendenti o dipendenti

Primo metodo

Sfruttiamo la definizione di linearmente dipendenza o indipendenza di vettori.

Scriviamo una combinazione lineare dei tre vettori e la eguagliamo al vettore nullo, precisamente:

$$(*) \quad k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + k_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$$

dove i  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sono degli scalari ovvero dei numeri reali.

Poniamo ora nella (\*), al posto dei vettori, le terne assegnate:

$$k_1 (1, 0, 1) + k_2 (2, 0, 2) + k_3 (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

Moltiplichiamo ciascuna componente del vettore per il corrispondente scalare:

$$(k_1, 0, k_1) + (2k_2, 0, 2k_2) + (k_3, k_3, k_3) = (0, 0, 0)$$

Sommiamo ora componente per componente:

$$(k_1 + 2k_2 + k_3, 0 + 0 + k_3, k_1 + 2k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

cioè:

$$(k_1 + 2k_2 + k_3, k_3, k_1 + 2k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE**  
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

---

**I Parziale - Compito A**  
**30/03/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

Affinché l'equazione sopra scritta sia soddisfatta, i due membri devono essere uguali, ovvero i due vettori (quello che figura al primo membro e quello che figura al secondo membro) devono avere uguali le componenti che si trovano nella medesima posizione, precisamente deve risultare:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

Resta quindi da risolvere il sistema sopra riportato, ovvero determinare i valori delle incognite  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), osservando che se sono tutti nulli allora i vettori assegnati sono linearmente indipendenti, mentre se ne esiste uno diverso da zero allora siamo nel caso della lineare dipendenza dei vettori.

Sottolineiamo, in primo luogo, che si tratta di un sistema quadrato di tre equazioni in tre incognite.

Dalla seconda equazione otteniamo:

$$k_3 = 0$$

Sostituiamo tale valore, ad esempio, nella prima equazione:

$$k_1 + 2k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = -2k_2$$

Sostituiamo i valori fino ad ora trovati nella terza equazione:

$$-2k_2 + 2k_2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

quindi la terza equazione non ha portato alcun contributo ai risultati precedentemente trovati.

Abbiamo così ottenuto:

$$k_3 = 0$$

$$k_1 = -2k_2$$

Dunque, per  $k_2 = 1$ , una possibile soluzione del sistema sarà data dalla terna:

$$(k_1, k_2, k_3) = (-2, 1, 0)$$

Poiché gli scalari, soluzione del nostro sistema, non sono tutti nulli ( $k_1$  dipende da  $k_2$ !!!) i tre vettori assegnati risultano **linearmente dipendenti**.

### Secondo metodo

Sfruttiamo la nozione di rango.

Consideriamo la matrice costituita dai tre vettori riga assegnati:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determiniamo il rango di  $A$ , sapendo che due o più vettori sono linearmente indipendenti se il rango della matrice ad essi associata è massimo.

Risulta, pertanto:

$$0 < r(A) \leq 3$$

(la matrice  $A$  non è la matrice nulla!!!)

**Prof.ssa Daniela Tondini**

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE**  
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

---

**I Parziale - Compito A**  
**30/03/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

Per il calcolo del rango di  $A$ , applichiamo il teorema di Kronecker e consideriamo il seguente minore di ordine 2 diverso da zero:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) \geq 2$$

Calcoliamo adesso l'unico minore orlato di  $M_1$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

Dunque, poiché tale minore è nullo risulta  $r(A) = 2$ , cioè il rango di  $A$  non è massimo. I vettori sono pertanto **linearmente dipendenti**.

***Prof.ssa Daniela Tondini***